

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**2008**  
**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

**Μονάδες 10**

**A.2** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ ;  
**Μονάδες 5**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A)$$

**Μονάδες 2**

**β.** Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 2**

**γ.** Όταν η διακρίνουσα  $\Delta$  της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και  $a \neq 0$  είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών.

**Μονάδες 2**

**δ.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

$$f''(x) > 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

**Μονάδες 2**

**ε.** Αν η  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $a, \beta, \gamma \in \Delta$  τότε ισχύει

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx$$

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  ισχύουν:

$$\left| (i + 2\sqrt{2})z \right| = 6 \quad \text{και} \quad |w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ .

**Μονάδες 6**

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$ .

**Μονάδες 7**

γ. την ελάχιστη τιμή του  $|w|$

**Μονάδες 6**

δ. την ελάχιστη τιμή του  $|z - w|$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 0.

**Μονάδες 3**

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης  $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$  για όλες τις πραγματικές τιμές του  $\alpha$ .

**Μονάδες 6**

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x),$$

για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ 4ο

Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

**Μονάδες 8**

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση  $g$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

**Μονάδες 4**

γ. Αν για τη συνάρτηση  $f$  του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση  $g$  του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και  $g(0) = g'(0) = 1$ , τότε:

i. να αποδείξετε ότι  $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

**Μονάδες 10**

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι 1-1

**Μονάδες 3**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

**A.1** Θεωρία (Σελ. 235 σχολ. βιβλίου).

**A.2** Θεωρία (Σελ. 191 σχολ. βιβλίου).

### B

- α. Σωστό
- β. Σωστό
- γ. Λάθος
- δ. Λάθος
- ε. Σωστό

### ΘΕΜΑ 2ο

**α.** Η ισότητα  $|(i + 2\sqrt{2})z| = 6$ , γράφεται ισοδύναμα:

$$|i + 2\sqrt{2}| \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{8+1} \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow 3|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$ , ακτίνα  $\rho = 2$  και εξίσωση (c):  $x^2 + y^2 = 2^2$ .

**β.** Η δοσμένη σχέση για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  περιγράφει τη μεσοκάθετο του τμήματος  $\Gamma\Delta$ , όπου  $\Gamma(1, -1)$  και  $\Delta(3, -3)$ . Πιο αναλυτικά αν  $w = x + yi$  οι μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση, έχουμε:

$$\begin{aligned} |w - (1 - i)| &= |w - (3 - 3i)| \Leftrightarrow |x + yi - 1 + i| = |x + yi - 3 + 3i| \Leftrightarrow \\ |(x - 1) + (y + 1)i|^2 &= |(x - 3) + (y + 3)i|^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (x - 3)^2 + (y + 3)^2 \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow \\ 4x - 4y - 16 &= 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0. \end{aligned}$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων  $M(w)$  είναι τα σημεία της ευθείας (ε) με εξίσωση:  $x - y - 4 = 0$ .

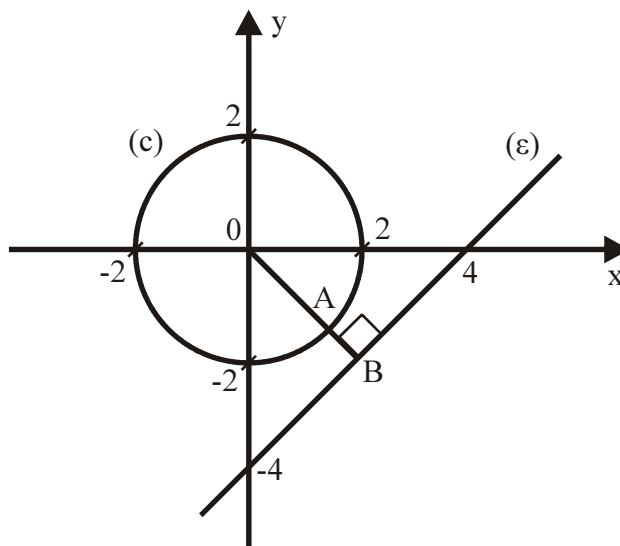
**γ.** Η ελάχιστη τιμή του  $|w|$  είναι η απόσταση του σημείου  $O$  από την ευθεία

(ε):  $x - y - 4 = 0$ , δηλαδή:

$$d(O, \varepsilon) = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

δ. Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, όπου αναπαριστώνται γεωμετρικά οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων (c), (ε) αντίστοιχα των μιγαδικών αριθμών z και w βρίσκουμε ότι, η ελάχιστη τιμή του  $|z - w|$  είναι το μήκος του τμήματος AB:

$$AB = OB - OA = 2\sqrt{2} - \rho = 2(\sqrt{2} - 1).$$



### ΘΕΜΑ 3ο

$$\begin{aligned} \alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{De l'Hospital}}{\underset{\substack{-\infty \\ +\infty}}{=}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \end{aligned}$$

Επίσης  $f(0) = 0$ . Συνεπώς  $f$  συνεχής στο 0.




β) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  ως γινόμενο συνεχών και συνεχής στο 0 λόγω του α.

Άρα η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$ .

$$\text{Για } x > 0: f'(x) = (x \ln x)' = (x)' \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'		-	+
f			
			

- Στο  $\left[0, \frac{1}{e}\right)$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα άρα:

$$f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right)\right) = \left(\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x), f(0)\right) = \left(-\frac{1}{e}, 0\right].$$

- Στο  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα άρα:

$$f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

$$\text{Επομένως: } f([0, +\infty)) = \left(-\frac{1}{e}, 0\right] \cup \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

γ.

Επειδή  $e^{\frac{a}{x}} > 0$ , για κάθε  $x \neq 0$ , για την εξίσωση  $x = e^{\frac{a}{x}}$  προκύπτει ο περιορισμός  $x \in (0, +\infty)$ . Με τον περιορισμό αυτό η εξίσωση  $x = e^{\frac{a}{x}}$  γράφεται ισοδύναμα:

$$\ln x = \ln e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x \ln x = a \Leftrightarrow f(x) = a, \quad x > 0 \quad (1).$$

Επειδή το σύνολο των τιμών της  $f$  βρέθηκε  $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$  προκύπτουν οι περιπτώσεις:

- Αν  $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{e}\right)$  η (1) είναι αδύνατη.

ii) Αν  $a = -\frac{1}{e}$ , η τιμή  $-\frac{1}{e}$  είναι η ελάχιστη τιμή της  $f$  την οποία παίρνει μόνον για  $x = \frac{1}{e}$ .

Έτσι η (1) έχει την ρίζα  $x = \frac{1}{e}$ .

iii) Αν  $a \in (-\frac{1}{e}, 0)$ , επειδή  $(-\frac{1}{e}, 0) = f\left(\left(0, \frac{1}{e}\right)\right)$  και η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\left(0, \frac{1}{e}\right)$  προκύπτει ότι, η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο  $\left(0, \frac{1}{e}\right)$  που είναι θετική.

Επίσης επειδή  $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) = f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right)$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$  προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς άλλη μία ρίζα στο  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$  που είναι επίσης θετική.

iv) Αν  $a = 0$  η (1) γίνεται  $x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (απορρίπτεται) ή  $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ . (Μία ρίζα θετική).

v) Αν  $a \in (0, +\infty)$  επειδή  $(0, +\infty) \subseteq \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) = f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right)$  και η  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ , προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ , που είναι θετική.

δ. Είναι  $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$  για κάθε  $x > 0$ .

Άρα  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

Η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο  $[x, x+1]$ , για κάθε  $x > 0$ .

Άρα υπάρχει  $\xi \in (x, x+1)$ :  $\frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(\xi) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) = f'(\xi)$  (2).

Όμως  $\xi < x+1$   $\xRightarrow{f' \text{ γν. αύξουσα}}$   $f'(\xi) < f'(x+1) \xRightarrow{(2)}$   $f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$ .

**ΘΕΜΑ 4ο**

α) Το  $\int_0^2 f(t)dt$  είναι πραγματικός αριθμός.

Έτσι μπορούμε να θέσουμε  $\int_0^2 f(t)dt = k \in \mathbb{R}$ . (1)

Τότε  $f(x) = (10x^3 + 3x)k - 45$  και άρα :

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 [(10t^3 + 3t)k - 45]dt = \left[ k \left( 10 \frac{t^4}{4} + 3 \frac{t^2}{2} \right) - 45t \right]_0^2 = 40k + 6k - 90 = 46k - 90.$$

(2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι:  $k = 46k - 90 \Leftrightarrow k = 2$

Οπότε τελικά:  $f(x) = (10x^3 + 3x)2 - 45 = 20x^3 + 6x - 45$ .

β) Έστω  $x \in \mathbb{R}$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ -\frac{g'(x-h) - g'(x)}{h} \right] = \\ \frac{-h=u}{\substack{h \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \lim_{u \rightarrow 0} \left[ -\frac{g'(x+u) - g'(x)}{-u} \right] &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x), \end{aligned}$$

αφού η  $g$  από υπόθεση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

γ) (i) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} &= \frac{0}{0} \stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)]'}{(h^2)'} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{h} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{g'(x+h) - g'(x) - g'(x-h) + g'(x)}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} \right] = \frac{1}{2} \cdot [g''(x) + g''(x)] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot g''(x) = g''(x). \end{aligned}$$

Οπότε  $g''(x) = f(x) + 45 = (20x^3 + 6x - 45) + 45 = 20x^3 + 6x$ .

Η  $g''(x) = 20x^3 + 6x$  γράφεται:

$$(g'(x))' = \left( 20 \frac{x^4}{4} + 6 \frac{x^2}{2} \right)' \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1.$$



Για  $x = 0$  έχουμε:  $g'(0) = c_1 = 1$ . Οπότε  $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ .

Η  $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$  τώρα γράφεται:

$$g'(x) = \left( 5 \frac{x^5}{5} + 3 \frac{x^3}{3} + x \right)' \Rightarrow g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$$

Για  $x = 0$  έχουμε:  $g(0) = c_2 = 1$

Άρα  $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ .

(ii) Η  $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$  ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ .

Όμως  $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα και '1-1'.