

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ**  
**2011**  
**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α.**

**A1.** Τι ονομάζεται εύρος μιας μεταβλητής;

**Μονάδες 6**

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η μέση τιμή (μέσος όρος) υπολογίζεται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές.

(Μονάδες 2)

**β)** Αν υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  και είναι  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$  αντίστοιχα, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2$$

(Μονάδες 2)

**γ)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , τότε ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 2)

**δ)** Ισχύει ότι  $\int_a^\beta \eta \mu x \, dx = \sigma \nu \beta - \sigma \nu \alpha$ .

(Μονάδες 2)

**ε)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \beta)$ .

(Μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**A3.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

**α)**  $(\ln x)' = \dots$ , με  $x > 0$  (Μονάδες 3)

**β)**  $(\eta \mu x)' = \dots$  (Μονάδες 3)

**γ)** Αν  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  με  $a \in \mathbb{R}$ , τότε  $\int_a^a f(x) \, dx = \dots$  (Μονάδες 3)

**Μονάδες 9**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} & \text{av } x < 4 \\ \alpha & \text{av } x = 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 3 & \text{av } x > 4 \end{cases}$$

- B1.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

**Μονάδες 10**

- B2.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

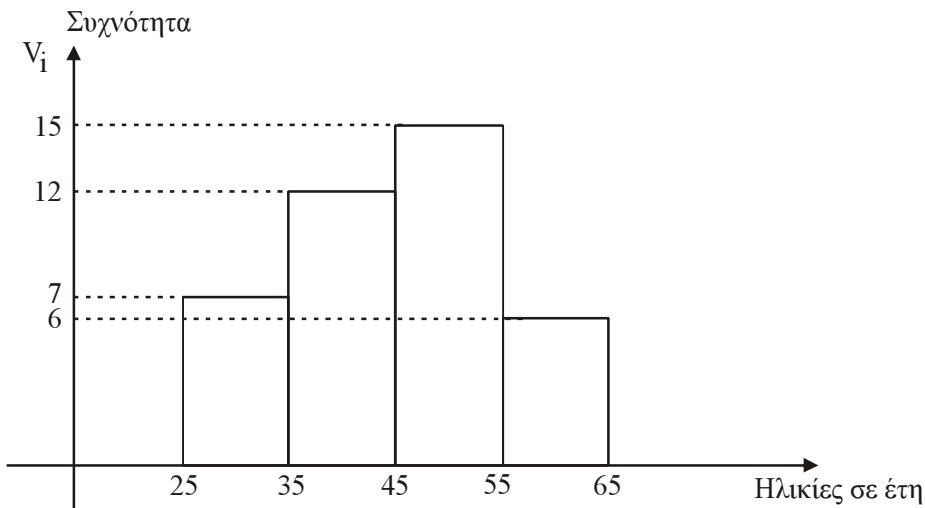
**Μονάδες 10**

- B3.** Να βρείτε για ποια τιμή του  $a \in \mathbb{R}$  η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 4$ .

**Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα, που αφορά τις ηλικίες 40 εργαζομένων σε μια επιχείρηση.



- Γ1.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα.

Ηλικίες [ , )	Μέσο διαστήματος $K_i$	Συχνότητα $v_i$	$K_i \cdot v_i$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$
[25,35)					
[35,45)					
[45,55)					
[55,65)					
<b>Σύνολα</b>					

**Μονάδες 10**

- Γ2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων. **Μονάδες 5**
- Γ3.** Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών; **Μονάδες 5**
- Γ4.** Τί ποσοστό εργαζομένων έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών; **Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  με  $x \in \mathbb{R}$ .

- Δ1.** Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 6**
- Δ2.** Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης  $f$ . **Μονάδες 5**
- Δ3.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $I = \int_1^3 f'(x) dx$  **Μονάδες 6**
- Δ4.** Άν  $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$  με  $x \in \mathbb{R}$ , να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ , τον άξονα  $x'$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = 0$  και  $x = 3$ . **Μονάδες 8**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### **ΘΕΜΑ Α.**

**A1.** Θεωρία: Εύρος μιας μεταβλητής είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη τιμή της μεταβλητής.

**A2.**  $a) \rightarrow \Sigma, \quad b) \rightarrow \Sigma, \quad c) \rightarrow \Lambda, \quad d) \rightarrow \Lambda, \quad e) \rightarrow \Sigma.$

**A3.**

$$a) (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \text{με } x > 0.$$

$$b) (\eta \mu x)' = \sigma v x.$$

$$c) \text{Av } f \text{ συνεχής στο } R \text{ με } a \in R, \text{ τότε } \int_a^{\alpha} f(x) dx = 0.$$

### **ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Για  $x < 4$  είναι:

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \frac{(x-3)(x-4)}{x-4} = x-3.$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-3) = 4-3=1.$$

**B2.** Για  $x > 4$  είναι:

$$f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3 = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - 3 = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} - 3 = \sqrt{x}+2-3 = \sqrt{x}-1.$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x}-1) = \sqrt{4}-1=1.$$

**B3.** Για να είναι συνεχής η  $f$  στο  $x_0 = 4$ , πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow a = 1.$$

### **ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**

Ηλικίες [ , )	Μέσο διαστήματος $K_i$	Συχνότητα $v_i$	$K_i \cdot v_i$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[25,35)	30	7	210	7	17,5
[35,45)	40	12	480	19	30
[45,55)	50	15	750	34	37,5
[55,65)	60	6	360	40	15
<b>Σύνολα</b>		40	1800		100

**Γ2.** Από τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει:  $\bar{x} = \frac{1800}{40} = 45$ .

- Γ3.** Από τον ίδιο πίνακα προκύπτει ότι ηλικία τουλάχιστον 45 ετών έχουν:  $15 + 6 = 21$  εργαζόμενοι.
- Γ4.** Από τη στήλη της σχετικής συχνότητας του πίνακα προκύπτει ότι ηλικία κάτω των 35 ετών έχουν το 17,5 % των εργαζομένων.

## ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)' = 3x^2 - 12x + 9 = \\ &= 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1) \cdot (x-3), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών.

x	-∞	1	3	+∞
$f'$	+	○	-	○
f	↗	↘	↗	

T.M.      T.E.

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 1]$ ,  $[3, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[1, 3]$ .

- Δ2.** Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η  $f$  έχει τοπικό μέγιστο στη θέση  $x_1 = 1$ , την τιμή  $f(1) = 5$ , ενώ έχει και τοπικό ελάχιστο στη θέση  $x_2 = 3$ , την τιμή  $f(3) = 1$ .

- Δ3.** Είναι  $I = \int_1^3 f'(x) dx = [f(x)]_1^3 = f(3) - f(1) = 1 - 5 = -4$ .

- Δ4.** Το ζητούμενο εμβαδόν υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:  $\int_0^3 |g(x)| dx$

Όμως επειδή είναι  $g(x) = f'(x)$  γνωρίζουμε από τον πίνακα προσήμων της  $f'(x)$  ότι είναι

- a) για  $x \in [0, 1]$ :  $g(x) = f'(x) \geq 0$ .  
 β) για  $x \in [1, 3]$ :  $g(x) = f'(x) \leq 0$ .

Έτσι είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |g(x)| dx + \int_1^3 |g(x)| dx = \int_0^1 g(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = [f(x)]_0^1 - [f(x)]_1^3 = \\ &= f(1) - f(0) - f(3) + f(1) = 5 - 1 - 1 + 5 = 8 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$